

# 数学 D (微分方程式)

## 期末試験 (練習用)

担当： 小林 光木

更新日： 2026 年 6 月 24 日

注意事項. 手書きのメモ (A4 サイズ以下, 1 枚のみ) 持ち込み可.

### 第 1 問

問 1.1. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) y''' - 3y'' + 2y' = 0, \quad (2) y''' + y = 0, \quad (3) y^{(4)} + 2y''' - 2y'' - 6y' + 5y = 0.$$

問 1.2. 次の微分方程式の特殊解を求めよ. ただし,  $D = \frac{d}{dx}$  とする.

$$(1) y^{(5)} - y''' = x^2, \quad (2) y''' - 8y = 16x^2, \quad (3) (D + 1)^3 y = 12e^{-x}.$$

### 第 2 問

問 2.1. Chebyshev 方程式

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$$

の通常点  $x = 0$  まわりにおける冪級数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

に関して, 以下の問に答えよ.

- (1)  $a_n$  が満たすべき漸化式を求めよ.
- (2) 冪級数解の収束半径を答えよ.
- (3) 多項式解が得られるのは,  $p$  がどのような値の時か答えよ.
- (4) 一次独立な 2 つの解を求めよ. ただし, 6 次以上の係数は求めなくても良いものとする.

### 第 3 問

問 3.1. Cauchy-Euler 方程式

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0, \quad x > 0$$

の一般解を求めよ. ただし,  $(p - 1)^2 \geq 4q$  とする.

問 3.2. 次の微分方程式に関して以下の問に答えよ.

$$2x^2 y'' + xy' - (x + 1)y = 0.$$

- (1) 決定方程式を書け.
- (2) 決定方程式の解  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ) を求めよ.

(3) Frobenius 級数解

$$x^{\lambda_1}(1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

の係数  $a_1, a_2$  を決定せよ.

(4) Frobenius 級数解

$$x^{\lambda_2}(1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)$$

の係数  $b_1, b_2$  を決定せよ.

## 第 4 問

問 4.1. 次の微分方程式に関して, 以下の問に答えよ.

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$$

- (1) 行列  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  の固有値を求めよ.
- (2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ.
- (3) 与連立微分方程式の一般解を求めよ.
- (4) 解が描く軌跡の概形をかけ. ただし, 解が進む向も軌跡上にかくこと.

問 4.2. 次の微分方程式に関して, 以下の問に答えよ.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$$

- (1) 行列  $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  の固有値を求めよ.
- (2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ.
- (3) 与連立微分方程式の一般解を求めよ.
- (4) 解が描く軌跡の概形をかけ. ただし, 解が進む向も軌跡上にかくこと.

問 4.3. 次の微分方程式に関して, 以下の問に答えよ.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = -2x + 5y \end{cases}$$

- (1) 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$  の固有値  $\lambda$  を求めよ.
- (2) 行列  $A$  のジョルダン標準基底を 1 つ求めよ. すなわち,

$$A\mathbf{u}_1 = \lambda\mathbf{u}_1, \quad A\mathbf{u}_2 = \lambda\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1$$

をみたす  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  の組を 1 組求めよ.

- (3) 与連立微分方程式の一般解を求めよ.

以下  $C, C_1, C_2, C_3, C_4$  を任意定数とする.

問 1.1 の解. (1)  $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{2x}$ , (2)  $y = C_1e^{-x} + e^{x/2} \left( C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$ ,

(3)  $y = (C_1 + C_2x)e^x + e^{-2x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$ .

問 1.2 の解. (1)  $y = -\frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{3}x^3 - 2x$ , (2)  $y = -2x^2$ , (3)  $y = (2x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3)e^{-x}$ .

問 2.1 の解. (1)  $a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n)}{(n+2)(n+1)}a_n$ , (2) 収束半径は 1,

(3)  $p$  が整数のとき (負の整数は重複した多項式解を与えるだけなので, 0 以上の整数という答でも可),

(4)  $y_1(x) = 1 - \frac{p \cdot p}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)p(p+2)}{4!}x^4 - \dots$ ,

$y_2(x) = x - \frac{(p-1)(p+1)}{3!}x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+1)(p+3)}{5!}x^5 - \dots$ .

問 3.1 の解. 2 次方程式  $\lambda^2 + (p-1)\lambda + q = 0$  の解  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$  とする.

$$y(x) = \begin{cases} C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2} & (\lambda_1 \neq \lambda_2), \\ C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_1} \log x & (\lambda_1 = \lambda_2). \end{cases}$$

問 3.2 の解. (1)  $\lambda(\lambda-1) + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$ , (2)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1/2$ ,

(3)  $y_1 = x \left( 1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{70}x^2 + \dots \right)$  より,  $a_1 = \frac{1}{5}, a_2 = \frac{1}{70}$ ,

(4)  $y_2 = x^{-1/2} \left( 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \dots \right)$  より,  $b_1 = -1, b_2 = -\frac{1}{2}$ .

問 4.1 の解. (1) 求める固有値は  $\lambda = 1, 6$ , (2) 固有値 1, 6 に対応する固有ベクトルはそれぞれ  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

(3)  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2e^{6t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , (4) 省略.

問 4.2 の解. (1) 求める固有値は  $\lambda = 1 \pm 3i$ , (2) 固有値  $1 + 3i, 1 - 3i$  に対応する固有ベクトルはそれぞれ  $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

(3)  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \left\{ C_1 \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{pmatrix} \right\}$ , (4) 原点は不安定な渦状源点である.

問 4.3 の解. (1)  $A$  の固有値は  $\lambda = 3$ , (2) 例えば  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$  とおくと,  $A\mathbf{u}_1 = 3\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2 = 3\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1$  となる.

(3)  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{3t} \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$ .