数学 D (微分方程式)

期末試験 (90 分)

担当： 小林 光木

試験実施日： 2024 年 7 月 17 日 (水) 3 限

注意事項

(1) 問題は問題 1 ～ 4 の計 4 題ある.

(2) 問題 4 はページを跨いで問題 4.3 までである.

(3) 手書きのメモ (A4 サイズ以下, 1 枚のみ) の持ち込み可.

(4) 不正行為と疑われる行為が認められた場合, その時点で教室を退場とする.

(5) 試験開始後, 乱丁, 落丁などがないか確認し, 該当する場合には速やかに申し出ること.

(6) 解答用紙のみ回収するため, 解答はすべて解答用紙に記入すること.

(7) 学籍番号, 氏名を正しく記入すること. 未記入, 誤りがあった場合, 試験の結果を 0 点として評価する.

(8) 問題冊子は持ち帰ること.

第 1 問

問 1.1. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, (2) $y''' - y = 0$, (3) $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$.

問 1.2. 次の微分方程式の特殊解を求めよ. ただし, $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ とする.

(1) $y'' - y' + y = x^3 - 3x^2 + 1$, (2) $y'' - 4y' + 3y = x^3 e^{2x}$, (3) $(D-2)^2 y = e^{2x} \sin x$.

(余白)

第 2 問

問 2.1. p を定数とする. Hermite 方程式

$$y'' - 2xy' + 2py = 0$$

の通常点 $x = 0$ まわりにおける冪級数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

に関して, 以下の問に答えよ.

(1) a_n が満たすべき漸化式を求めよ.

(2) 冪級数解の収束半径を答えよ.

(3) 多項式解が得られるのは, p がどういう値の時か答えよ.

(4) 一次独立な 2 つの解 y_0, y_1 を求めよ. ただし, 6 次以上の係数は求めなくても良いものとする.

(余白)

第 3 問

問 3.1. 次の微分方程式を解け.

(1) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$,　(2) $x^2y'' + \frac{1}{4}y = 0$.

問 3.2. 次の微分方程式に関して以下の問に答えよ.

$$2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0.$$

(1) 決定方程式を書け.

(2) 決定方程式の解 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \geq \lambda_2)$ を求めよ.

(3) Frobenius 級数解

$$x^{\lambda_1}(1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$$

の係数 a_1, a_2 を決定せよ.

(4) Frobenius 級数解

$$x^{\lambda_2}(1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)$$

の係数 b_1, b_2 を決定せよ.

(余白)

第 4 問

余白ページを挟んで, 問 4.1 から 問 4.3 の全部で 3 題あるので注意すること.

問 4.1. 次の微分方程式に関して, 以下の問に答えよ.

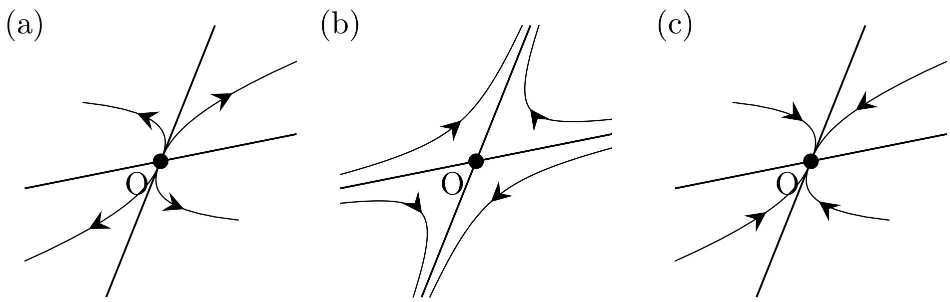
$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$$

(1) 行列 $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ. ただし, $\lambda_1 > \lambda_2$ とする.

(2) 固有値 λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を 1 組求めよ.

(3) 連立微分方程式の一般解を求めよ.

(4) 解軌道の概形として正しいものを, 次の (a) ∼ (c) の中から選べ. ただし, 矢印は解が進む方向を表す.



(余白)

問 4.2. 次の微分方程式に関して, 以下の問に答えよ.

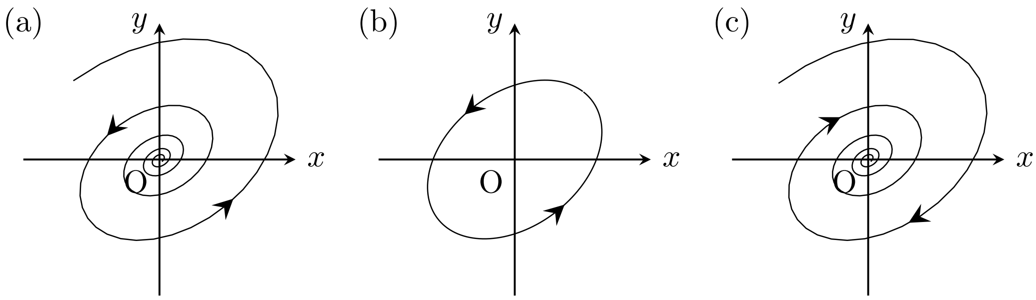
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y \\ \dot{y} = 5x + 2y \end{cases}$$

(1) 行列 $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ の固有値 $\lambda = a \pm ib$, $b > 0$ を求めよ.

(2) 固有値 $\lambda = a + ib$ に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ.

(3) 連立微分方程式の一般解を求めよ.

(4) 解軌道の概形として正しいものを, 次の (a) ~ (c) の中から選べ. ただし, 矢印は解が進む方向を表す.



(余白)

問 4.3. 次の微分方程式に関して, 以下の問に答えよ.

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$$

(1) 行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ の固有値 λ を求めよ.

(2) 行列 A のジョルダン標準基底を 1 つ求めよ. すなわち,

$$A\boldsymbol{u}_1 = \lambda \boldsymbol{u}_1, \quad A\boldsymbol{u}_2 = \lambda \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_1$$

をみたす $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の組を 1 組求めよ.

(3) 連立微分方程式の一般解を求めよ.

(余白)

以下 C, C_1, C_2, C_3, C_4 を任意定数とする．

問 1.1 の解.　(1) $y = C_1e^{2x}+C_2e^{x}+C_3e^{-x}$,　(2) $y = C_1e^{x}+e^{-x/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$,

(3) $y = \bigl(C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3\bigr)e^{-x}$.

問 1.2 の解.　(1) $y = x^3 - 6x - 5$,　(2) $y = e^{2x}\bigl(-x^3 - 6x\bigr)$,

(3) $y = -e^{2x}\sin x$.

問 2.1 の解.　(1) $a_{n+2} = \dfrac{2(n-p)}{(n+2)(n+1)}a_n$,　(2) 収束半径は ∞,

(3) p が 0 以上の整数のとき,

(4) 例えば $a_0 = 1, a_1 = 0$ および $a_0 = 0, a_1 = 1$ として,

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1 - px^2 + \frac{p(p-2)}{6}x^4 + \cdots, \\
y_1 &= x + \frac{1-p}{3}x^3 + \frac{(1-p)(3-p)}{30}x^5 + \cdots.
\end{aligned}
$$

問 3.1 の解.　(1) $2\lambda(\lambda-1) + 3\lambda - 1 = 0$ より $\lambda = \frac{1}{2}, -1$. したがって, $y = C_1x^{1/2} + C_2x^{-1}$.

(2) $\lambda(\lambda-1) + \frac{1}{4} = 0$ より $\lambda = \frac{1}{2}$ は重解. したがって, $y = x^{1/2}(C_1 + C_2\log x)$.

問 3.2 の解.　(1) 決定方程式は $\lambda(2\lambda - 1) = 0$.

(2) $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 0$.

(3) $a_1 = -\frac{7}{6}$, $a_2 = \frac{21}{40}$.

(4) $b_1 = -3$, $b_2 = 2$.

問 4.1 の解.　(1) 求める固有値は $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

(2) それぞれに対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{u}_1 = \binom{1}{1}$, $\boldsymbol{u}_2 = \binom{2}{1}$ が取れる.

(3) 一般解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1e^{t}\binom{1}{1} + C_2e^{-t}\binom{2}{1}.$$

(4) 正しい概形は (b).

問 4.2 の解.　(1) 求める固有値は $\lambda = 3 \pm 3i$.

(2) $\lambda = 3 + 3i$ に対応する固有ベクトルとして $\binom{2}{1-3i}$ が取れる.

(3) 一般解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1e^{3t}\binom{2\cos 3t}{\cos 3t + 3\sin 3t} + C_2e^{3t}\binom{2\sin 3t}{\sin 3t - 3\cos 3t}.$$

(4) 正しい概形は (a).

問 4.3 の解.　(1) 求める固有値は $\lambda = 3$.

(2) ジョルダン標準基底として $\boldsymbol{u}_1 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{u}_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ が取れる.

(3) 一般解は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + C_2 e^{3t} \left(t \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right).$$

2024 年 7 月 17 日 (水) 3 限　数学 D (微分方程式)　期末試験　解答用紙

C_1, C_2, C_3, C_4 を任意定数とする.

問 1.1	(1)	$y =$
	(2)	$y =$
	(3)	$y =$
問 1.2	(1)	$y =$
	(2)	$y =$
	(3)	$y =$

問 2.1	(1)	
	(2)	求める収束半径は
	(3)	
	(4)	$y_0 =$
		$y_1 =$

問 3.1	(1)	
	(2)	

学籍番号		氏名		点	

問 3.2	(1)			
	(2)	$\lambda_1 =$	$\lambda_2 =$	
	(3)	$a_1 =$	$a_2 =$	
	(4)	$b_1 =$	$b_2 =$	

問 4.1	(1)	$\lambda_1 = \qquad \lambda_2 =$	(2)	$\boldsymbol{u}_1 = \qquad \boldsymbol{u}_2 =$
	(3)	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$		
	(4)			
問 4.2	(1)	$\lambda =$	(2)	
	(3)	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$		
	(4)			
問 4.3	(1)	$\lambda =$	(2)	$\boldsymbol{u}_1 = \qquad \boldsymbol{u}_2 =$
	(3)	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$		