

数学 D (微分方程式)

中間試験 (練習用)

担当：小林 光木

更新日：2026年6月24日

第1問

問 1.1. 次の微分方程式を解け.

$$(1) y' = 1 + \frac{1}{2}x^2 + e^x \quad (2) y'' = 3x + \sin x \quad (3) y^2 + (y')^2 = 0$$

問 1.2. 次の1階の微分方程式の一般解と特異解を求めよ.

$$y' = -2y^{3/2}$$

問 1.3. 次の初期値問題を解け.

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$$

問 1.4. 実数 c をパラメータにもつ次の形の関数を与えるとき、以下の設問に答えよ.

$$y = cx^3$$

- (1) 与えられた関数が満たす微分方程式を、パラメータ c を消去することで求めよ.
- (2) 与えられた関数に直交する関数が満たす微分方程式を求めよ.
- (3) (2) で求めた微分方程式を解け.

第2問

問 2.1. 次の微分方程式を解け.

$$(1) (1 + x^2)y' = x \quad (2) y' = \frac{y}{x} \quad (3) y' = -2xy \quad (4) y' + y \tan x = 0$$

問 2.2. 次の微分方程式を解け.

$$(1) (x^2 - 2y^2) dx + xy dy = 0 \quad (2) xy' = y + 2xe^{-y/x}$$

第3問

問 3.1. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y dx + \left(x + \frac{2}{y}\right) dy = 0$$

問 3.2. 次の微分方程式に関して以下の小問に答えよ.

$$y dx + (x^2y - x) dy = 0$$

- (1) 変数 x のみに依存する積分因子 $\mu(x)$ を1つ求めよ.
- (2) 与えられた微分方程式を解け.

問 3.3. 次の微分方程式に関して以下の小問に答えよ.

$$-y dx + x dy = (1 + y^2) dy$$

(1) $d\left(\frac{x}{y}\right)$ を計算せよ.

(2) 与えられた微分方程式を解け.

第 4 問

問 4.1. 次の 1 階非斉次線形微分方程式を解け.

$$y' + \frac{y}{x} = 3x$$

問 4.2. 次の微分方程式の一般解を階数降下法を用いて解け.

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

第 5 問

問 5.1. 次の初期値問題の解を求めよ.

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

問 5.2. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) y'' + y = 0 \quad (2) x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$$

問 5.3. 次の微分方程式の一次独立な解 y_1, y_2 の Wronskian を $W(x)$ とするとき, 以下の設問に答えよ.

$$y'' + 2xy' + \tan(x^2)y = 0$$

(1) W の満たす微分方程式を書け.

(2) (1) で求めた微分方程式を解け.

第 6 問

問 6.1. 次の微分方程式を特殊解 $y = x$ を利用して解け.

$$x^2 y'' + xy' - y = 0$$

問 6.2. 次の微分方程式を解け.

$$(1) y'' + y' - 6y = 0 \quad (2) y'' + 2y' + y = 0$$

問 6.3. 次の微分方程式を解け.

$$(1) y'' + y = \sin x \quad (2) y'' - y' - 2y = 4x^2$$

問 6.4. 次の微分方程式に関して, 以下の設問に答えよ.

$$y'' + y = \csc x$$

(1) 与式の斉次形とその一般解を答えよ.

(2) (1) で求めた微分方程式の一次独立な解 y_1, y_2 からなる Wronskian $W(x)$ を求めよ.

(3) 与式を解け.

以下 C, C_1, C_2 を任意定数とする.

問 1.1 の解. (1) $y = C + x + \frac{1}{6}x^3 + e^x$ (2) $y = C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^3 - \sin x$ (3) $y \equiv 0$

問 1.2 の解. 一般解 $y = \frac{1}{(t+C)^2}$, 特異解 $y \equiv 0$

問 1.3 の解. $y = 2 \cos x$

問 1.4 の解. (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$ (2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3y}$ (3) $x^2 + 3y^2 = C^2$

問 2.1 の解. (1) $y = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$ (2) $y = Cx$ (3) $y = Ce^{-x^2}$ (4) $y = C \cos x$

問 2.2 の解. (1) $y^2 = x^2 + Cx^4$ (2) $y = x \log(\log Cx^2)$

問 3.1 の解. $xy + \log y^2 = C$

問 3.2 の解. (1) $1/x^2$ (2) $\frac{1}{2}y^2 - \frac{y}{x} = C$

問 3.3 の解. (1) $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2}$ (2) $-\frac{x}{y} = -\frac{1}{y} + y + C$

問 4.1 の解. $y = x^2 + \frac{C}{x}$

問 4.2 の解. $y^2 = C_1x + C_2$

問 5.1 の解. $y = \sin x$

問 5.2 の解. (1) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ (2) $y = C_1x + C_2\frac{1}{x^2}$

問 5.3 の解. (1) $W'(x) + 2xW(x) = 0$ (2) $W(x) = C \exp(-x^2)$

問 6.1 の解. $y = C_1x + C_2\frac{1}{x}$

問 6.2 の解. (1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$ (2) $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

問 6.3 の解. (1) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2}x \cos x$ (2) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - 3 + 2x - 2x^2$

問 6.4 の解. (1) 与式の斉次形は $y'' + y = 0$, この一般解は $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

(2) $W(x) = 1$ (または $W(x) = -1$. 符号は $\cos x, \sin x$ のどちらを y_1, y_2 としてとるかに依る)

(3) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \log(\sin x) - x \cos x$