

# 数学 D (微分方程式)

## 中間試験 (90 分)

担当：小林 光木

試験実施日：2024 年 5 月 29 日 (水) 3 限

### 注意事項

- (1) 問題は問題 1 ~ 6 の計 6 題ある。
- (2) 試験開始後、乱丁、落丁などがないか確認し、該当する場合には速やかに申し出ること。
- (3) 解答用紙のみ回収するため、解答はすべて解答用紙に記入すること。
- (4) 学籍番号、氏名を正しく記入すること。未記入、誤りがあった場合、試験の結果を無効とする。
- (5) 早めに終了した場合、机上に解答用紙を裏返しにして置けば、静かに退出することができる。
- (6) 問題冊子は持ち帰ること。

## 第 1 問

問 1.1. 次の微分方程式を解け.

$$(1) y' = 2x + e^x \quad (2) y'' = 6x + \sin x \quad (3) y^4 + (y')^4 = 0$$

問 1.2. 次の 1 階の微分方程式の一般解と特異解を求めよ.

$$y' = -2y^{3/2}$$

問 1.3. 次の初期値問題を解け.

$$y' = 2y, \quad y(0) = 2$$

問 1.4. 実数  $c$  をパラメータにもつ次の形の関数を与えるとき, 以下の設問に答えよ.

$$y = cx^4$$

- (1) パラメータ  $c$  を消去することで, 与えられた関数すべてが満たす微分方程式を求めよ.
- (2) 与えられた関数との交点が必ず直角となる関数が満たす微分方程式を求めよ.
- (3) (2) で求めた微分方程式を解け.

(余白)

## 第 2 問

問 2.1. 次の微分方程式を解け.

$$(1) y' = -\frac{y}{x} \quad (2) y' - 2y \tan x = 0$$

問 2.2. 次の微分方程式を解け.

$$(1) xy' = 2x + 3y \quad (2) x^2y' = y^2 + 2xy$$

(余白)

### 第 3 問

問 3.1. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(y - x^3) dx + (x + y^3) dy = 0$$

問 3.2. 次の微分方程式に関して以下の小問に答えよ.

$$(x + 2) \sin y dx + x \cos y dy = 0$$

(1)  $P(x, y) = (x + 2) \sin y$ ,  $Q(x, y) = x \cos y$  とおくととき,  $\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) / Q$  を計算せよ.

(2) 変数  $x$  のみに依存する積分因子  $\mu(x)$  を 1 つ求めよ.

(3) 与えられた微分方程式を解け.

問 3.3. 次の微分方程式に関して以下の小問に答えよ.

$$y dx + x dy = (1 + 3y^2) dy$$

(1) 全微分  $d(xy)$  を計算せよ.

(2) 与えられた微分方程式を解け.

(余白)

## 第 4 問

問 4.1. 次の 1 階非斉次線形微分方程式を解け.

$$y' + 2xy = \exp(-x^2) \cos x$$

問 4.2. 次の微分方程式の一般解を階数降下法を用いて一般解を求めよ.

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

(余白)

## 第 5 問

問 5.1. 次の初期値問題の解を求めよ.

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$$

問 5.2. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) y'' - y = 0 \quad (2) x^2 y'' - 3xy' - 5y = 0$$

問 5.3. 次の微分方程式の一次独立な解  $y_1, y_2$  の Wronskian を  $W(x)$  とする. 以下の問に答えよ.

$$y'' + 3x^2 y' + x\sqrt{x^2 + 1}y = 0$$

- (1)  $W$  の満たす微分方程式を書け.
- (2) (1) で求めた微分方程式を解け.

(余白)

## 第 6 問

問 6.1. 特殊解  $y_1 = x$  を持つ次の微分方程式に関して、以下の問に答えよ.

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$$

(1)  $p(x) = -\frac{x}{x-1}$  とおくとき,  $\int y_1^{-2} \exp\left(-\int p dx\right) dx$  を計算せよ.

(2)  $y_1$  に一次独立なもう一つの解  $y_2$  を求めよ.

問 6.2. 次の微分方程式を解け.

$$(1) y'' + 2y' - 3y = 0 \quad (2) y'' + 2y' + 2y = 0 \quad (3) y'' + 4y' + 4y = 0$$

問 6.3. 次の微分方程式の特殊解  $y_p$  を求めよ.

$$(1) y'' + y = e^x \quad (2) y'' + y = \sin x \quad (3) y'' + y = x^2$$

問 6.4. 次の微分方程式に関して以下の問に答えよ. ただし,  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  である.

$$y'' + y = \sec x$$

(1) 斉次式の解  $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$  の Wronskian を  $W(x)$  とおくとき, 次を計算せよ.

$$\int \frac{y_1 \sec x}{W} dx, \quad \int \frac{y_2 \sec x}{W} dx$$

(2) 与えられた微分方程式の特殊解  $y_p$  を求めよ.

(余白)

$C, C_1, C_2$  を任意定数とする.

問 1.1	(1)	$y =$			
	(2)	$y =$			
	(3)				
問 1.2	一般解: $y =$		特異解:		
問 1.3	$y =$				
問 1.4	(1)	$\frac{dy}{dx} =$	(2)	$\frac{dy}{dx} =$	(3)

問 2.1	(1)	$y =$	(2)	$y =$	
問 2.2	(1)	$y =$			
	(2)				

問 3.1					
問 3.2	(1)	$\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) / Q =$	(2)	$\mu(x) =$	
	(3)				
問 3.3	(1)	$d(xy) =$	(2)		

学籍番号		氏名		点	
------	--	----	--	---	--

問 4.1	$y =$				
問 4.2					

問 5.1	$y =$				
問 5.2	(1)	$y =$			
	(2)	$y =$			
問 5.3	(1)	$W' =$		(2)	$W =$

問 6.1	(1)	$\int y_1^{-2} \exp(-\int p \, dx) \, dx =$		(2)	$y_2 =$
問 6.2	(1)	$y =$			
	(2)	$y =$			
	(3)	$y =$			
問 6.3	(1)	$y_p =$		(2)	$y_p =$
	(3)	$y_p =$			
問 6.4	(1)	$\int \frac{y_1 \sec x}{W} \, dx =$		$\int \frac{y_2 \sec x}{W} \, dx =$	
	(2)	$y_p =$			

以下  $C, C_1, C_2$  を任意定数とする.

問 1.1 の解. 各 3 点 (計 9 点)

$$(1) y = C + x^2 + e^x \quad (2) y = C_1 + C_2x + x^3 - \sin x \quad (3) y \equiv 0$$

問 1.2 の解. 6 点 (片方正解なら 0.33 倍, 変数を  $t$  で書いている場合 0.8 倍)

$$\text{一般解 } y = \frac{1}{(x+C)^2}, \text{ 特異解 } y \equiv 0$$

問 1.3 の解. 3 点

$$y = 2e^{2x}$$

問 1.4 の解. 各 3 点 (計 9 点)

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x} \quad (2) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y} \quad (3) x^2 + 4y^2 = C^2$$

問 2.1 の解. 各 4 点 (計 8 点)

$$(1) y = \frac{C}{x} \quad (2) y = \frac{C}{\cos^2 x}$$

問 2.2 の解. 各 4 点 (計 8 点)

$$(1) y = Cx^3 - x \quad (2) \text{一般解 } y = \frac{Cx^2}{1-Cx}, \text{ 特異解 } y = -x$$

問 3.1 の解. 3 点

$$4xy - x^4 + y^4 = C$$

問 3.2 の解. 各 3 点 (計 9 点)

$$(1) \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) / Q = 1 + \frac{1}{x} \quad (2) \mu(x) = xe^x \quad (3) x^2 e^x \sin y = C$$

問 3.3 の解. 各 3 点 (計 6 点)

$$(1) d(xy) = y dx + x dy \quad (2) xy = y + y^3 + C$$

問 4.1 の解. 4 点

$$y = Ce^{-x^2} + e^{-x^2} \sin x$$

問 4.2 の解. 4 点

$$y^2 = C_1x + C_2$$

問 5.1 の解. 3 点

$$y = 2 \sin 2x$$

問 5.2 の解. 各 4 点 (計 8 点)

$$(1) y = C_1e^x + C_2e^{-x} \quad (2) y = C_1x^5 + C_2\frac{1}{x}$$

問 5.3 の解. 各 4 点 (計 8 点)

$$(1) W' = -3x^2W \quad (2) W(x) = C \exp(-x^3)$$

問 6.1 の解. 各 2 点 (計 4 点)

$$(1) \int y_1^{-2} \exp\left(-\int p dx\right) dx = \frac{e^x}{x} \quad (2) y_2 = e^x$$

問 6.2 の解. 各 4 点 (計 12 点)

$$(1) y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x \quad (2) y = C_1 e^{-x} \sin x + C_2 e^{-x} \cos x \quad (3) y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

問 6.3 の解. 各 3 点 (計 9 点)

$$(1) y_p = \frac{1}{2} e^x \quad (2) y_p = -\frac{1}{2} x \cos x \quad (3) y_p = x^2 - 2$$

問 6.4 の解. (1) 3 点 (2) 4 点 (sin, cos の間違いは 0.25 倍)

$$(1) \int \frac{y_1 \sec x}{W} dx = x, \int \frac{y_2 \sec x}{W} dx = -\log|x|$$

$$(2) y_p = \cos x \log \cos x + x \sin x$$

符号間違いは点数 0.5 倍とした.