数学 D (微分方程式)

期末試験 (100 分)

担当： 小林 光木

試験実施日：令和 7 年 7 月 16 日 (水) 3 限

注意事項

(1) 第 1 ∼ 4 問の合計 120 点満点 (第 3 問 (3) のみ 10 点, 残り各 5 点).

(2) 試験開始後, 乱丁, 落丁などがないか確認すること.

(3) 解答用紙のみ回収するため, 解答はすべて解答用紙に記入すること.

(4) 早めに終了した場合, 机上に解答用紙を裏返しにして静かに退出してもよい.

(5) 問題冊子は持ち帰ること.

第 1 問

配点 (合計 45 点)：小問各 5 点

問 1.1. 次の微分方程式の特殊解を求めよ.

(1) $y'' - 9y = e^{3x}$

(2) $y'' - y = \sin 2x$

(3) $y'' - y' - 6y = x^2$

(4) $y'' - y' - 6y = x^2 + e^{-2x}$

問 1.2. 次の微分方程式に関して, 以下の問に答えよ.

$$y'' - y = \frac{1}{\cosh x}$$

(1) $y_1 = \cosh x$, $y_2 = \sinh x$ のウロンスキアンを $W(x)$ とするとき,

$$\int \frac{y_1(x)}{W(x)} \frac{1}{\cosh x} \, \mathrm{d}x \, , \quad \int \frac{y_2(x)}{W(x)} \frac{1}{\cosh x} \, \mathrm{d}x$$

を求めよ.

(2) 与えられた微分方程式の特殊解を求めよ.

問 1.3. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y^{(5)} - y' = 0$$

問 1.4. 次の微分方程式の特殊解を求めよ. ただし, $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ とする.

(1) $(D^5 - D)y = 1 + x^2 + x^4$

(2) $(D-3)(D+2)y = x^2 e^{-2x}$

(余白)

第 2 問

配点 (合計 30 点)：各小問 5 点

問 2.1. Chebyshev の微分方程式

$$(1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0$$

の $x=0$ まわりにおける冪級数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

に関して, 次の問いに答えよ.

(1) a_n が満たすべき漸化式を答えよ.

(2) 解として多項式が得られるときの p の条件を答えよ.

(3) 冪級数解の収束半径を答えよ.

(4) 一次独立な 2 つの冪級数解

$$y_1 = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \qquad y_2 = x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots$$

における a_1, a_2, b_2, b_3 を決定し, y_1 を 2 次まで, y_3 を 3 次まで展開した形で求めよ.

問 2.2. 次の微分方程式の解法を以下の条件の下で 2 種類提示せよ.

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = 0$$

(1) $y = x^\lambda$ とおいて特性方程式を導出し, その解 λ_1, λ_2 を用いること. ただし, ここで導出した特性方程式は異なる 2 つの実数解をもつものとする.

(2) (1) とは異なり, 変数変換を用いて微分方程式を変更し, その方程式の特性方程式の解 λ_1, λ_2 を用いること. ただし, ここで導出した特性方程式は重解も許す実数解をもつものとする. また, (1) で導出した特性方程式と一致することも確認せよ.

(余白)

第 3 問

配点 (合計 25 点)：(3) 以外各 5 点, (3) 5×2 点

問 3.1. $x = 0$ を確定特異点にもつ次の 2 階斉次線形微分方程式に関して以下の問に答えよ.

$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$

(1) 確定特異点 $x = 0$ に対する決定方程式を書け.

(2) 決定方程式の解を λ_1, λ_2 求めよ. ただし, $\lambda_1 > \lambda_2$ とする.

(3) 一次独立な 2 つの Frobenius 級数解

$$y_1 = x^{\lambda_1}(1 + a_1 x + \cdots), \quad y_2 = x^{\lambda_2}(1 + b_1 x + \cdots)$$

の係数 a_1, b_1 を決定し, 上の形で展開した Frobenius 級数解 y_1, y_2 を求めよ.

(4) 上で求めた解の性質として正しいものを選択肢から選べ.

選択肢

(a) y_1, y_2 は共に原点付近で 0 に近づく.

(b) y_1, y_2 は共に原点付近で発散する.

(c) y_1 は原点付近で 0 に近づき, y_2 は発散する.

(d) y_1 は原点付近で発散し, y_2 は 0 に近づく.

(e) y_1 は原点付近で 0 以外の実数に近づき, y_2 は 0 に近づく.

(f) y_1 は原点付近で 0 以外の実数に近づき, y_2 は発散する.

(g) y_1 は原点付近で 0 に近づき, y_2 は 0 以外の実数に近づく.

(h) y_1 は原点付近で発散し, y_2 は 0 以外の実数に近づく.

(余白)

第 4 問

配点 (合計 20 点)：各小問 5 点

問 4.1. 次の微分方程式に関して, 以下の問に答えよ.

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x + y \\ \dot{y} = 4x + 3y \end{cases}$$

(1) 連立微分方程式の一般解を求めよ.

(2) 解軌道の概形として正しいものを, 以下の (a) ∼ (j) の中から選べ.

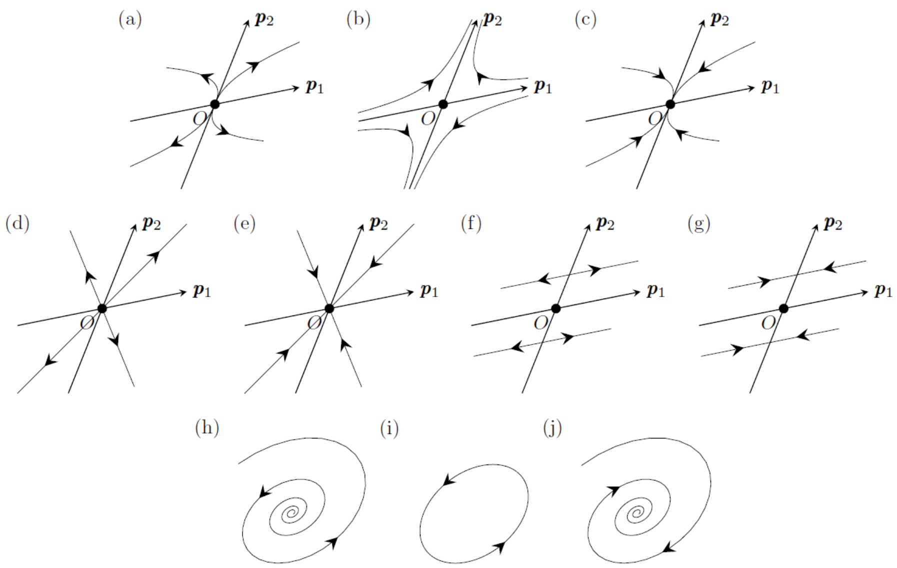
問 4.2. 次の微分方程式に関して, 以下の問に答えよ.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y \\ \dot{y} = -2x - 2y \end{cases}$$

(1) 連立微分方程式の一般解を求めよ．ただし, 実数値解として求めることとし, 複素数で書かれたものは認めない.

(2) 解軌道の概形として正しいものを, 次の (a) ∼ (j) の中から選べ.

選択肢



ただし, $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は線形微分方程式の係数からなる行列の固有ベクトルとする.

(余白)

2024 年 5 月 29 日 (水) 3 限　数学 D (微分方程式)　中間試験　解答用紙

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 を任意定数とする.

問 1.1	(1)		(2)	
	(3)		(4)	
問 1.2	(1)	$\displaystyle\int \frac{y_1}{W\cosh x}\,\mathrm{d}x =$		$\displaystyle\int \frac{y_2}{W\cosh x}\,\mathrm{d}x =$
	(2)			
問 1.3				
問 1.4	(1)		(2)	
問 2.1	(1)			
	(2)		(3)	
	(4)	$y_1 =$		$y_2 =$
問 3.1	(1)		(2)	$\lambda_1 =$ 　　$\lambda_2 =$
	(3)	$y_1 =$		$y_2 =$
	(4)			
問 4.1	(1)	$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} =$	(2)	
問 4.2	(1)	$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} =$	(2)	

学籍番号		氏名		点	

問 2.2	

以下, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 は任意定数とする.

問 1.1 の解. (1) $y = \dfrac{1}{6}xe^{3x}$ (2) $y = -\dfrac{1}{5}\sin 2x$ (3) $y = -\dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{18}x - \dfrac{7}{108}$

(4) $y = -\dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{1}{18}x - \dfrac{7}{108} - \dfrac{1}{5}xe^{-2x}$

問 1.2 の解.

(1) $\displaystyle\int \frac{y_1}{W\cosh x}\,\mathrm{d}x = x,\ \int \frac{y_2}{W\cosh x}\,\mathrm{d}x = \log(\cosh x)$

(2) $y = -\cosh x\log(\cosh x) + x\sinh x$

問 1.3 の解.

$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + C_4\cos x + C_5\sin x$

問 1.4 の解.

(1) $y = -25x - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{5}x^5$ (2) $y = -\dfrac{1}{5}e^{-2x}\left\{\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^2 + \dfrac{2}{25}x\right\}$

問 2.1 の解.

(1) $a_{n+2} = -\dfrac{(p-n)(p+n)}{(n+1)(n+2)}a_n$ (2) p は整数 (あるいは p は 0 以上の整数でも可) (3) 1

(4) $y_1 = 1 - \dfrac{p^2}{2!}x^2 + \cdots,\ y_2 = x - \dfrac{(p-1)(p+1)}{3!}x^3 + \cdots,$

問 2.2 の解. 証明は講義中に与えたので, 方針のみ与える.

(1) $y = x^\lambda$ とおいて解く

(2) $x = e^t$ とおいて, t に関する微分方程式に書き換える.

問 3.1 の解. (1) $\lambda^2 - \dfrac{1}{2}\lambda = 0$ (2) $\lambda_1 = \dfrac{1}{2},\ \lambda_2 = 0$

(3) $y_1 = \sqrt{x}\left\{1 - \dfrac{1}{3!}x + \cdots\right\} = \sin\sqrt{x},\ y_2 = 1 - \dfrac{1}{2!}x + \cdots = \cos\sqrt{x}$ (4) (g)

問 4.1 の解.

(1) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1e^{7t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ (2) (a)

(3) $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1e^{-2t}\begin{bmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{bmatrix} + C_2e^{-2t}\begin{bmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}$ (4) (j)