数学 D (微分方程式)

中間試験 (90 分)

担当： 小林 光木

試験実施日： 令和 7 年 5 月 28 日 (水) 3 限

注意事項

(1) 第 1 ～ 6 問は各 20 点, 合計 120 点満点 (証明 1 問のみ 15 点, 残り各 5 点).

(2) 試験開始後, 乱丁, 落丁などがないか確認すること.

(3) 解答用紙のみ回収するため, 解答はすべて解答用紙に記入すること.

(4) 早めに終了した場合, 机上に解答用紙を裏返しにして静かに退出してもよい.

(5) 問題冊子は持ち帰ること.

第 1 問

問 1.1. 次の微分方程式の解をすべて求めよ.

(1) $y'' = \sin x$

(2) $y^2 + (y')^4 = 0$

問 1.2. 次の 1 階の微分方程式について, 以下の問いに答えよ.

$$(y' - e^x)(y' - 3y) = 0$$

(1) 一般解と特異解の組を 1 つ挙げよ.

(2) 解の 2 パラメータ族を構成せよ.

(余白)

第 2 問

問 2.1. 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし, σ は正の定数とする．

(1) $y' = -2xy/\sigma^2$　　(2) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$

問 2.2. 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$　　(2) $x^2 y' = 3(x^2+y^2)\tan^{-1}\dfrac{y}{x} + xy$

(余白)

第 3 問

問 3.1. 次の微分方程式が完全微分方程式なら, その一般解を求めよ. そうでないなら, 解答欄に「これは完全微分方程式でない」と書け.

(1) $y \cos x \, \mathrm{d}x + (y^2 + \sin x) \, \mathrm{d}y = 0$ (2) $(x + y) \, \mathrm{d}x + (-y + x) \, \mathrm{d}y = 0$

問 3.2. 次の微分方程式に関して, これを完全微分方程式にする積分因子はあるか. あるなら, その積分因子と微分方程式の一般解を求めよ. なければ, 解答欄に「積分因子は存在しない」と書け.

(1) $(y + y^2 \sin x) \, \mathrm{d}x - x \, \mathrm{d}y = 0$ (2) $y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y = \sqrt{xy} \, \mathrm{d}y$

(余白)

第 4 問

問 4.1. 次の微分方程式に関して, 以下の問いに答えよ.

$$(x \log x)y' + y = 3x^3$$

(1) 斉次式の一般解を求めよ.

(2) 非斉次式の一般解を求めよ.

問 4.2. 次の微分方程式を階数降下法などを用いて, その一般解を求めよ.

(1) $xy'' + y' = 4x$

(2) $yy'' + (y')^2 = 0$

(余白)

第 5 問

問 5.1. 微分方程式

$$y' = f(x, y)$$

に関して, $\frac{\partial f}{\partial y}$ が点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の近くで存在しかつ連続ならば, $y(x_0) = y_0$ を満たす局所解 y が一意であることを示せ (存在は示さなくてよい).

問 5.2. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2 y'' - xy' - 15y = 0$$

(余白)

第 6 問

問 6.1. 次の微分方程式の 2 つの解 y_1, y_2 のウロンスキアン W が満たす微分方程式およびその一般解を求めよ.

$$y'' + y' \cos x + y e^{\tan^{-1} x} = 0$$

問 6.2. 次の微分方程式の一次独立な 2 つの特殊解 y_1, y_2 を求め, さらに y_1, y_2 のウロンスキアン W も計算せよ.

$$y'' - 2y' - 15y = 0$$

問 6.3. 次の微分方程式の解をすべて求めよ.

(1) $y'' - 4y' + 8y = 0$

(2) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(余白)

2024 年 5 月 29 日 (水) 3 限　数学 D (微分方程式)　中間試験　解答用紙

C, C_1, C_2 を任意定数とする.

問 1.1	(1)		(2)	
問 1.2	(1)		(2)	
問 2.1	(1)		(2)	
問 2.2	(1)		(2)	
問 3.1	(1)		(2)	
問 3.2	(1)	積分因子	一般解	
	(2)	積分因子	一般解	
問 4.1	(1)		(2)	
問 4.2	(1)		(2)	
問 5.2				
問 6.1	微分方程式		一般解	
問 6.2	$y_1 =$	$y_1 =$	$W =$	
問 6.3	(1)		(2)	

学籍番号		氏名		点	

問 5.1	

以下, C, C_1, C_2 は任意定数とする.

問 1.1 の解. (1) $y = -\sin x + C_1 x + C_2$ (2) $y \equiv 0$

問 1.2 の解.

(1) 一般解 $y = e^x + C_1$, 特異解 $y = C_2 e^{3x}$ (一般解と特異解が逆でも良い)

(2) $(y - e^x - C_1)(y - C_2 e^{3x}) = 0$

問 2.1 の解. (1) $y = Ce^{-x^2/\sigma^2}$ (2) $y = \tan\big(\tan^{-1} x + C\big)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < C \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$
(ただし, (2) の C の範囲については今回の採点の対象外とした.)

問 2.2 の解.

(1) $x^2 + y^2 = Cx$ (原点を通り, 中心が x 軸上にある直径 C の円)

(2) $y = x \tan Cx^3$

問 3.1 の解. (1) $\dfrac{y^3}{3} + y \sin x = C$ (2) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} + xy = C$

問 3.2 の解.

(1) 積分因子 $\dfrac{1}{y^2}$, 一般解 $\dfrac{x}{y} - \cos x = C$ (2) 積分因子 $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$, 一般解 $2\sqrt{xy} = y + C$

問 4.1 の解.

(1) $y = \dfrac{C}{\log x}$ (2) $y = \dfrac{x^3 + C}{\log x}$

問 4.2 の解.

(1) $y = x^2 + C_1 \log x + C_2$ (2) $y^2 = C_1 x + C_2$

問 5.1 の解. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ は (x_0, y_0) の近くで連続であるから, ある近傍で有界である. その上界を L とする. y_1, y_2 を $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ をみたす 2 つの局所解とする. 平均値の定理より, x が十分 x_0 に近いとき

$$|f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq L|y_1(x) - y_2(x)|$$

である. したがって $x \geq x_0$ では

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)| \, \mathrm{d}t$$

となるので, Gronwall の不等式より $y_1(x) = y_2(x)$ である. $x \leq x_0$ についても同様に従う. よって局所解は一意である.

問 5.2 の解. $y = C_1 x^{-3} + C_2 x^5$

問 6.1 の解. 微分方程式 $W' + W \cos x = 0$, 一般解 $W = Ce^{-\sin x}$

問 6.2 の解. 一次独立な 2 つの解 e^{-3x}, e^{5x}, ウロンスキアン $8e^{2x}$

問 6.3 の解. (1) $y = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x$ (2) $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$