数学 D (微分方程式)

中間試験 (90 分)

担当： 小林 光木

試験実施日： 令和 8 年 6 月 3 日 (水) 3 限

注意事項

(1) 合計 120 点満点 (証明問題は 20 点, それ以外は各 5 点).

(2) 試験開始後, 乱丁, 落丁などがないか確認すること.

(3) 解答用紙のみ回収するため, 解答はすべて解答用紙に記入すること.

(4) 早めに終了した場合, 机上に解答用紙を裏返しにして静かに退出してもよい.

(5) 問題冊子は持ち帰ること.

第 1 問

問 1.1. 次の微分方程式の解をすべて求めよ.

(1) $y'' = 4x + \cos x$

(2) $y^4 + 9(y')^2 = 0$

問 1.2. 次の 1 階の微分方程式について, 以下の問いに答えよ.

$$(y' - y)(y' - 4y) = 0$$

(1) 一般解と特異解の組を 1 つ挙げよ.

(2) 解の 2 パラメータ族を 1 つ構成せよ.

(余白)

第 2 問

問 2.1. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y' = -3y$

(2) $y' = (1-x)y$

問 2.2. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y' = \dfrac{x+2y}{2x+y}$

(2) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$

(余白)

第 3 問

問 3.1. 次の微分方程式が完全微分方程式なら, その一般解を求めよ. そうでないなら, 解答欄に「これは完全微分方程式でない」と書け.

(1) $(2xy + \cos x)\,\mathrm{d}x + (x^2 + 3y^2)\,\mathrm{d}y = 0$ (2) $(x + 2y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y = 0$

問 3.2. 次の微分方程式に関して, これを完全微分方程式にする積分因子はあるか. あるなら, その積分因子と微分方程式の一般解を求めよ. なければ, 解答欄に「積分因子は存在しない」と書け.

(1) $(y + y^2 \cos x)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$ (2) $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x$

(余白)

第 4 問

問 4.1. 次の微分方程式に関して, 以下の問いに答えよ.

$$(x \log x)y' + y = 2x^2$$

(1) 斉次式の一般解を求めよ.

(2) 非斉次式の一般解を求めよ.

問 4.2. 次の微分方程式を階数降下法などを用いて, その一般解を求めよ.

(1) $xy'' + y' = x$

(2) $yy'' - 2(y')^2 = 0$

(余白)

第 5 問

問 5.1. 微分方程式

$$y' = f(x, y)$$

において, f が点 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の近くで連続微分可能とする. このとき, $y(x_0) = y_0$ を満たす局所解 y が存在することを示せ.

ただし, 次の Weierstrass の M 判定法を用いてよい: 関数列 u_n が区間 I 上で $|u_n(x)| \leq M_n$ を満たし, 数列の級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ が収束するならば, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ は I 上で一様収束する.

(余白)

第 6 問

問 6.1. 次の微分方程式の 2 つの解 y_1, y_2 のウロンスキアンを W とする. $W(0) = 3$ のとき, W を求めよ.

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$$

問 6.2. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' - y' - 6y = 0$　　(2) $y'' - 2y' + 5y = 0$　　(3) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(余白)

令和 8 年 5 月 27 日 (水) 3 限　数学 D (微分方程式)　中間試験　解答用紙

C, C_1, C_2 を任意定数とする.

問 1.1	(1)		(2)	
問 1.2	(1)		(2)	
問 2.1	(1)		(2)	
問 2.2	(1)		(2)	
問 3.1	(1)		(2)	
問 3.2	(1)	積分因子	一般解	
	(2)	積分因子	一般解	
問 4.1	(1)		(2)	
問 4.2	(1)		(2)	
問 6.1	$W =$			
問 6.2	(1)		(2)	
	(3)			

学籍番号		氏名		点	

問 5.1	

以下, C, C_1, C_2 は任意定数とする.

問 1.1 の解.　(1) $y = \dfrac{2}{3}x^3 - \cos x + C_1 x + C_2$　(2) $y \equiv 0$

問 1.2 の解.

(1) 一般解 $y = C_1 e^x$, 特異解 $y = C_2 e^{4x}$ (一般解と特異解が逆でも良い)

(2) $(y - C_1 e^x)(y - C_2 e^{4x}) = 0$

問 2.1 の解.　(1) $y = Ce^{-3x}$　(2) $y = Ce^{x - x^2/2}$

問 2.2 の解.

(1) $\dfrac{x+y}{(x-y)^3} = C$　(2) $\dfrac{y^2}{x^2} - 2\log|x| = C$

問 3.1 の解.　(1) $x^2 y + \sin x + y^3 = C$　(2) これは完全微分方程式でない

問 3.2 の解.

(1) 積分因子 $\dfrac{1}{y^2}$, 一般解 $\dfrac{x}{y} + \sin x = C$　(2) 積分因子 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 一般解 $\sqrt{x^2+y^2} - x = C$

問 4.1 の解.

(1) $y = \dfrac{C}{\log x}$　(2) $y = \dfrac{x^2 + C}{\log x}$

問 4.2 の解.

(1) $y = \dfrac{x^2}{4} + C_1 \log|x| + C_2$　(2) $y = \dfrac{1}{C_1 x + C_2}$ (ただし $y \equiv 0$ も解)

問 5.1 の解. 点 (x_0, y_0) を含む長方形

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\}$$

を十分小さくとる. R 上で $|f| \le M$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$ とおき, $h > 0$ を $h \le a$, $Mh \le b$ となるようにとる. 区間 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上で Picard 反復列

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,\mathrm{d}t$$

を定める. このとき, 各 y_n は $|y_n(x) - y_0| \le b$ を満たす. また平均値の定理より

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le \int_{x_0}^{x} L|y_n(t) - y_{n-1}(t)|\,\mathrm{d}t$$

であり, 帰納的に

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le \frac{ML^n|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

が従う. したがって Weierstrass の M 判定法により $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(y_{n+1} - y_n)$ は I 上一様収束する. その和として得られる極限関数を y とする. f の連続性と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ の有界性から $f(t, y_n(t))$ は $f(t, y(t))$ に一

様収束するので, 極限をとって

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$$

を得る. よって $y(x_0) = y_0$ であり, 両辺を微分して $y' = f(x, y)$ となる. したがって局所解が存在する.

問 6.1 の解. $W' + \dfrac{2x}{1+x^2}W = 0$ より, $W = \dfrac{C}{1+x^2}$. $W(0) = 3$ から $C = 3$. よって $W = \dfrac{3}{1+x^2}$.

問 6.2 の解.

(1) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$ (2) $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ (3) $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$